Musterlösung zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Wir beweisen die Äquivalenz von (A) und (B), indem wir $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zeigen.

$A \Rightarrow B$: Wir beweisen durch Induktion über die Länge der Wörter, daß jedes Wort, das A erfüllt auch B erfüllt*.

Induktionsanfang: $|w| = 0$, d.h. $w = \varepsilon$.
Offensichtlich erfüllt ε auch B (wg. B.1).

Induktionsannahme:
Jedes w mit $|w| < n$, das A erfüllt, erfüllt auch B.

Induktionsschritt: $n > 0$
Sei w ein Wort mit $|w| = n$, das A erfüllt. Wegen $n > 0$ besitzt w mind. ein Zeichen. Wegen A.2 ist das erste Zeichen von w eine öffnende Klammer.

$w = (w'$

Wegen A.1 und A.2 gibt es in w eine Position, an der die Anzahl der öffnenden und schließenden Klammern zum ersten Mal gleich ist; wir können w also wie folgt zerlegen:

$w = (u) v$

$w = (u) v$, wobei
u A erfüllt (wg. Wahl von u und A.2)
v A erfüllt

zu Aufgabe 1

Offensichtlich gilt $|u| < n$ und $|v| < n$. Wegen der Induktionsvoraussetzung erfüllen also u und v die Charakterisierung B.

Damit erfüllt auch (u) die Charakterisierung B, und $(u)v$ die Charakterisierung B (wg. B.2 bzw. B.3).

$B \Rightarrow A$:
Wir beweisen induktiv über den Aufbau von w gemäß Charakterisierung B, daß w auch A erfüllt.

1.) ε erfüllt offensichtlich A.1 und A.2.

2.) Sei u ein gemäß B korrekt geklammerter Ausdruck. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt u auch A. Es ist zu zeigen, daß auch (u) A erfüllt.

Nach Voraussetzung erfüllt u die Bedingungen A.1 und A.2. Offensichtlich erfüllt (u) dann A.1. Die Bedingung A.2 wird von (u) ebenfalls erfüllt:

Präfixe von (u):
$($
$(v$ — v Präfix von u (erfüllt A.2)
$(u$
(u)

zu Aufgabe 1

3. Seien u und v zwei gemäß B korrekt geklammerte Ausdrücke, die nach Induktionsvoraussetzung auch A erfüllen. Es ist zu zeigen, daß uv auch A erfüllt.

Offensichtlich erfüllt uv die Bedingung A.1. Die Unterscheidung der folgenden Fälle

w	w ist Präfix von u
u	
ux	x ist Präfix von v
uv	

zeigt, daß uv auch Bedingung A.2 erfüllt

#

Aufgabe 2

a.) Sei R eine Äquivalenzrelation über A und seien $[a]$ und $[b]$ Äquivalenzklassen von R mit $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

$[a] = \{x \in A \mid aRx\}$

Zu zeigen: $[a] = [b]$.

Wegen $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ gibt es ein $c \in A$ mit $c \in [a]$ und $c \in [b]$. Gemäß Definition der Äquivalenzklassen gilt dann:

$$a R c \quad \text{und} \quad b R c .$$

Wir zeigen nun $[a] = [b]$, indem wir für jedes $x \in A$ beweisen: $x \in [a]$ gdw $x \in [b]$.

$x \in [a] \overset{\text{Def }[a]}{\text{gdw}} a R x$

gdw (Symmetrie von R)

$x R a$

gdw (Transitivität von R (mit aRc))

$x R c$

gdw (Symmetrie von R)

$c R x$

gdw (Transitivität von R (mit bRc))

$x \in [b] \overset{\text{Def }[b]}{\text{gdw}} b R x$

#

Bemerkung: Die Reflexivität von R haben wir in diesem Beweis nicht benutzt!

Reflexivität ist nötig für $A = \bigcup_{a \in A} [a]$

Gegenbeispiel: a • b • $[a] = \emptyset$ $[b] = \emptyset$

zu Aufgabe 2

b) Zu zeigen: R_f ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

- Reflexivität: Für $a \in A$ gilt $a R_f a$ gdw $f(a) = f(a)$ ✓

- Transitivität: Gelte $a R_f b$ und $b R_f c$. Gemäß Def. von R_f gilt dann $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$; also gilt auch $f(a) = f(c)$ und damit $a R_f c$. ✓

- Symmetrie: Gelte $a R_f b$. Gemäß Def. von R_f gilt dann $f(a) = f(b)$; also auch $f(b) = f(a)$ und damit $b R_f a$.

#

Bemerkung: Daß R_f eine Äquivalenz ist, folgt unmittelbar aus der Definition von R_f und daraus, daß die Gleichheit eine Äquivalenz ist.

c) Die Äquivalenzklassen von R_g für $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g(x) = x^2$ sind:

$\{0\} = [0]$
$\{-1, 1\} = [1] = [-1]$
$\{-2, 2\} = [2] = [-2]$
$\{-3, 3\} = [3] = [-3]$
$\vdots$

Der Index von R_g ist ω (abzählbar).

zu Aufgabe 2

c) (Fortsetzung)

Die Äquivalenzklassen von R_h für $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h(x) = x \bmod 3$ sind:

$\{0, 3, 6, 9, \dots\} = [0] = [3] = [6] = [9] = \dots$
$\{1, 4, 7, 10, \dots\} = [1] = [4] = \dots$
$\{2, 5, 8, 11, \dots\} = [2] = [5] = \dots$

Der Index von R_h ist 3.

Aufgabe 3

Das Ergebnis in tabellarischer Form vorweg:

	$A,B \subseteq \Sigma^*$	$A,B \subseteq \Sigma$	$A \subseteq B$
a) $(A\cap B)^* = A^* \cap B^*$	falsch (1)	richtig (4)	richtig (5)
b) $(A\cup B)^* = A^* \cup B^*$	falsch (2)	falsch (2)	richtig (5)
c) $(AB)^* = A^* B^*$	falsch (3)	falsch (3)	falsch (3)

ad 1) Gegenbeispiel: Wähle $A = \{a\}$, $B = \{aa\}$.

Dann gilt: $A \cap B = \emptyset$ und somit

$(A\cap B)^* = \emptyset^* = \{\varepsilon\}$

$\neq$

$\left.\begin{array}{l} A^* = (aa)^* \\ B^* = a^* \end{array}\right\} \Rightarrow A^* \cap B^* = (aa)^*$

ad 2) Gegenbeispiel: Wähle $A = \{a\}$, $B = \{b\}$

Dann gilt: $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$

$B^* = \{\varepsilon, b, bb, bbb, \ldots\}$

$A^* \cup B^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots, b, bb, bbb, \ldots\}$

$\neq$

$(A\cup B)^* = \{a,b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$

zu Aufabe 3

ad 3) Gegenbeispiel: Wähle $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$

Dann gilt: $(AB)^* = \{\varepsilon, aa, ab, aaaa, aaab, abab, \ldots\}$

$\neq$

$A^* B^* = B^* = \{a,b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$

ad 4) Für $A,B \subseteq \Sigma$ gilt $(A\cap B)^* = A^* \cap B^*$

$X \subseteq Y \Rightarrow X^* \subseteq Y^*$ (Monotonie von $*$)

Wegen $A\cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$ gilt $(A\cap B)^* \subseteq A^*$ und $(A\cap B)^* \subseteq B^*$.
Damit gilt $(A\cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$.

Es bleibt zu zeigen $(A\cap B)^* \supseteq A^* \cap B^*$.

via Kontraposition

Sei $w \notin (A\cap B)^*$.

Zu zeigen $w \notin A^* \cap B^*$

Da $A,B \subseteq \Sigma$ muß w ein Zeichen enthalten, das nicht in A oder nicht in B vorkommt. O.B.d.A $a \notin A$. Dann gilt jedoch auch $w \notin A^*$ also $w \notin A^* \cap B^*$.

Damit gilt $(A\cap B)^* = A^* \cap B^*$.

ad 5) Mit $X \subseteq Y$ gilt $X^* \subseteq Y^*$.

Mit $A \subseteq B$ gilt $A^* \subseteq B^*$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

$A^* \cap B^* = A^*$, $A^* \cup B^* = B^*$

$A \subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$, $A \cup B = B$

Also: $(A\cap B)^* = A^* = A^* \cap B^*$

$(A \cup B)^* = B^* = A^* \cup B^*$

Aufgabe 4

a) Die Menge der Abbildungen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist überabzählbar (also nicht abzählbar).

Beweis 1: Diese Menge ist eine Obermenge der Menge der Funktionen über $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$, deren Überabzählbarkeit in der Vorlesung bewiesen wurde.

Beweis 2: Diagonalverfahren (explizit)

Wir nehmen an, daß $f_0, f_1, f_2, \ldots$ eine "Abzählung" der Funktionen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist und definieren $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$f(n) = f_n(n) + 1$$

Die Abbildung f kommt in der "Abzählung" nicht vor. Denn gäbe es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f_i = f$, dann gälte

$$f_i(i) = f(i) = f_i(i) + 1 \quad \lightning$$

Graphisch:

f	$f_i(0)$	$f_i(1)$	$f_i(2)$	…
f_0	5 6	3	2	1
f_1	3	9 10	8	4
f_2	1	1	0 1	3
f_3	4	7	1	1 2
$f = f_i$				k k+1 $\lightning$

zu Aufgabe 4

b) Die Menge der endlichen Sequenzen über einem endlichen Alphabet A ist abzählbar falls $|A| \geq 1$ (Beweis: Teilmenge der endlichen Sequenzen über einem abzählbaren Alphabet. Vgl. Teilaufgaben c./g./h.)

Für $A = \emptyset$ (bzw. $|A| = 0$) ist die Menge der endlichen Sequenzen über A endlich ($A^* = \emptyset^* = \{\varepsilon\}$) also nicht abzählbar.

Im allg. gilt also die Aussage nicht.

c) Die Menge der endlichen Sequenzen über einem abzählbaren Alphabet ist abzählbar.

Beweis: nach den Teilaufgaben g. und h.

d) Die Menge der unendlichen Sequenzen A^ω über einem Alphabet mit $|A| \geq 2$ ist überabzählbar.

neue Notation

Beweis 1: Die Menge der unendlichen Sequenzen über A ist nur eine andere Repräsentation der Abbildungen $f: \mathbb{N} \to A$. Diese Menge ist als "Obermenge" von $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ überabzählbar.

Beweis 2: Diagonalverfahren

Sollte jetzt klar sein!

zu Aufgabe 4

d.) (Fortsetzung)

Bemerkung: Für $|A| = 1$ gibt es genau eine unendliche Sequenz. Die Menge der unendlichen Sequenzen ist also in diesem Falle endlich.

Für $A = \emptyset$ gibt es keine unendliche Sequenz über A.

Im allg. ist die Aussage d. nicht richtig.

e.) Die Menge aller formalen Sprachen über $\{1\}^*$ ist überabzählbar. → unäre Sprachen

Jedes Wort $w \in \{1\}^*$ kann als Repräsentation einer natürlichen Zahl aufgefaßt werden $(n = |w|)$. Eine Sprache kann als Teilmengen der natürlichen Zahlen aufgefaßt werden, die durch ihre charakteristische Funktion $f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ repräsentiert werden kann. Diese Menge ist überabzählbar (vgl. Vorlesung & Teilaufgabe a.).

f.) Die Menge aller formaler Sprachen über einem endlichen Alphabet mit $|A| \geq 1$ ist überabzählbar.

Beweis: "Obermenge" der formalen Sprachen über $\{1\}$.

zu Aufgabe 4

f.) (Fortsetzung)

Für $A = \emptyset$ gibt es genau zwei formale Sprachen: $\{\emptyset, \{\epsilon\}\}$

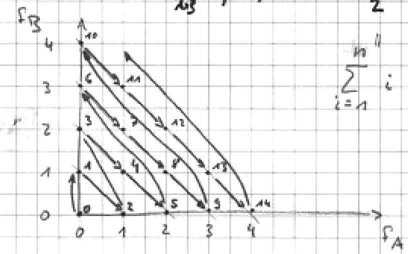
g.) Das kartesische Produkt zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar. S

Beweis: Seien $f_A: A \to \mathbb{N}$ und $f_B: B \to \mathbb{N}$ die bijektiven Abbildungen für die abzählbaren Mengen A und B.

Wir definieren $f_{A \times B}: A \times B \to \mathbb{N}$

mit $f_{A \times B}(a, b) = \dfrac{g(a,b) \cdot (g(a,b)+1)}{2} + f_A(a)$

mit $g(a,b) = f_A(a) + f_B(b)$



$\sum_{i=1}^{n} i$ = Anzahl der Elemente auf den ersten n Diagonalen

$n = g(a,b)$: Anzahl der Diagonalen vor (a,b)

h.) Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen A_i $(i \in \mathbb{N})$ ist wieder abzählbar.

Wir nehmen an, daß alle A_i disjunkt sind (der allgemeine Fall folgt dann aus der Teilmengenbeziehung).

zu Aufgabe 4

b.) (Fortsetzung)

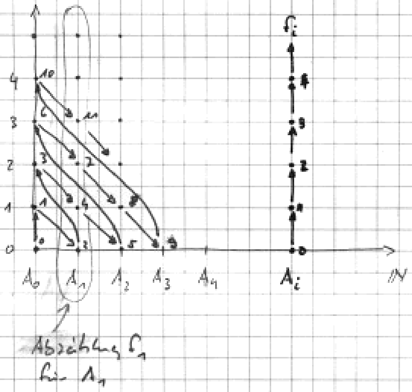
Sei $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ die "Abzählung" für A_i

Dann ist $f : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \to A$ wie folgt definiert

für $a \in A_i$: $f(a) = \frac{g_i(a) \cdot (g_i(a)+1)}{2} + i$

wie beim kartesischen Produkt

$g_i(a) = f_i(a) + i$



zu c.) Sei A eine abzählbare Menge:

1. Schritt: Wir zeigen durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$, daß für alle $n \geq 1$ gilt A^i ist abzählbar.

Ind. Anfang: $A^1 = A$ ist per Def. abzählbar

Ind. Schritt: $A^{n+1} = A A^n$ ist abzählbar, da $A A^n$ als kartesisches Produkt zweier abzählbarer Mengen aufgefaßt werden kann; A^n ist per Ind. Vor. abzählbar, A per Def.

zu Aufgabe 4

zu c.) (Fortsetzung)

2. Schritt: $A^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i$

Gemäß Schritt 1 ist jede Menge A^i abzählbar falls $i \geq 1$, $A^0 = \{\varepsilon\}$.

A^* ist also die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, die gemäß Teilaufgabe b. wieder abzählbar ist.

Streng genommen kommt mit $A^0 = \{\varepsilon\}$ noch ein Element dazu. Jede abzählbare Menge bleibt aber abzählbar, wenn man endlich viele Elemente hinzufügt.