Aufgabe 1

Grammatik:

Γ:

$S \to \varepsilon$
$S \to a$
$S \to b$
$S \to aSa$
$S \to bSb$

oder:

Γ':

$S \to \varepsilon$
$S \to A$

$A \to a$
$A \to b$
$A \to aa$
$A \to bb$
$A \to aAa$
$A \to bAb$

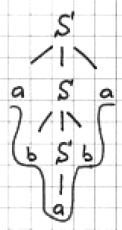
keine ε-Regel außer für das Axiom, das auf der rechten Seite nicht vorkommt

Dies ist eine
<u>lineare Grammatik</u>

Ableitung (gemäß Γ):

$S \to aSa \to abSba \to ababa$

Ableitungsbaum dazu:



Ableitungsbäume werden erst später bei kontextfreien Grammatiken interessant

Aufgabe 2

a) $\emptyset$ ist eine lokale Sprache:

Wähle $B = \emptyset$ oder $E = \emptyset$.

$\{\varepsilon\}$ ist nicht lokal, denn jedes Wort einer lokalen Sprache muß mind. ein Zeichen besitzen (aus B)

$a(bc)^*$ ist lokal:

Wähle $B = \{a\}$, $E = \{a, c\}$

$R = \{aa, ac, ba, bb, ca, cc\} \cup$
$\{d\}\Sigma \cup \Sigma\{d\}$

$L = a(bc)^*(da)^*$ ist nicht lokal.

Denn wegen $abcda \in L$ muß gelten
$ab \notin R$, $bc \notin R$, $cd \notin R$, $da \notin R$
und $a \in A$
und $a \in E$

Dann ist jedoch auch $abcdabcda \in L$ ↯

b) Sei $L_1 = (B_1\Sigma_1^* \cap \Sigma_1^* E_1) \setminus (\Sigma_1^* R_1 \Sigma_1^*)$ und

$L_2 = (B_2\Sigma_2^* \cap \Sigma_2^* E_2) \setminus (\Sigma_2^* R_2 \Sigma_2^*)$

Für $L_1 L_2$ wählen wir

$B = B_1$, $E = E_2$ und
$R = R_1 \cup (\Sigma_1\Sigma_2 \setminus E_1 B_2) \cup \Sigma_2\Sigma_1 \cup R_2$

zu Aufgabe 2

Blatt 2
③

b.) (Fortsetzung)

Für $L_1 \cup L_2$ wählen wir

$$B = B_1 \cup B_2 \quad , \quad E = E_1 \cup E_2$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \Sigma_1 \Sigma_2 \cup \Sigma_2 \Sigma_1$$

Für $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ gilt die Aussage nicht.
Denn $L_1 = ab$ und $L_2 = ba$ sind lokale Sprachen (wähle $B_1 = \{a\}$, $E_1 = \{b\}$, $R_1 = \{aa, ba, bb\}$ und $B_2 = \{b\}$, $E_2 = \{a\}$, $R_2 = \{bb, ab, aa\}$)

$L_1 L_2 = abba$ ist nicht lokal, da mit $a \in A$ und $a \in A$ auch a in der Sprache wäre ↯

$L_1 \cup L_2 = \{ab, ba\}$ ist nicht lokal, da mit $a, b \in A$ und $a, b \in E$ auch a in der Sprache wäre ↯

c.) Seien B, E, R die zur Sprache gehörigen Mengen. Dann definieren wir den Automaten

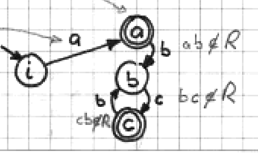
neues Symbol nicht in Σ

$$A = (\{i\} \cup \Sigma, \Sigma, \delta, i, E) \quad \text{mit}$$

$$\delta = \{ (a, b, b) \mid a, b \in \Sigma, ab \notin R \} \cup \{ (i, a, a) \mid a \in B \}$$

im Zustand merken wir uns das letzte eingelesene Zeichen

Zeichen aus B



$B = \{a\}$
$E = \{a, c\}$
$R = \{aa, ac, ba, bb, ca, cc\}$

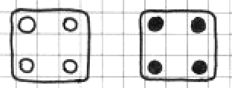
Aufgabe 3

Blatt 2
④

Die wichtigste Beobachtung, um ein einfaches Modell zu erhalten, ist die folgende Vereinfachung: Es genügt vier Zustände zu betrachten

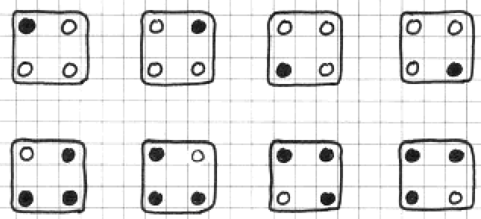
● Zahl
○ Kopf

1.) "g"



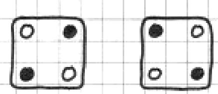
alle vier Münzen zeigen das gleiche Symbol

2.) "e"



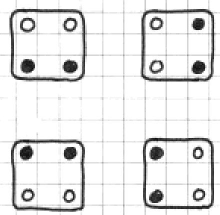
eine Münze unterscheidet sich von den anderen drei Münzen

3.) "d"



jeweils die zwei Münzen auf der Diagonalen sind gleich

4.) "n"

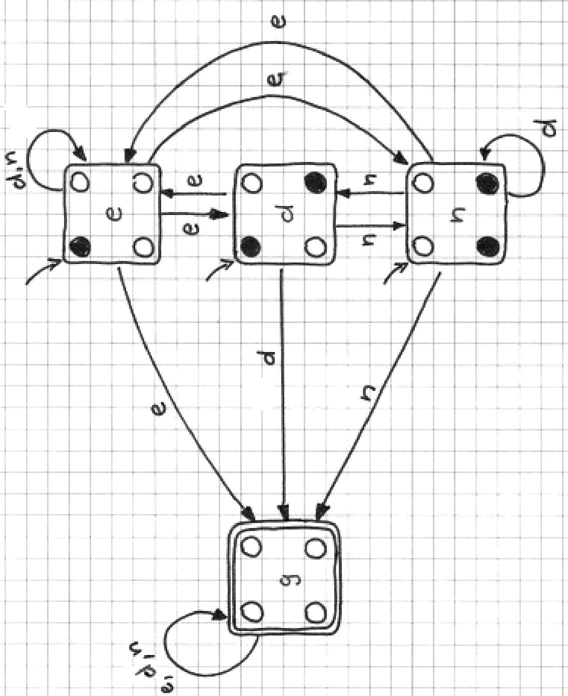


jeweils zwei benachbarte Münzen sind gleich

zu Aufgabe 3

Blatt 2

5



Achtung: Der Endzustand bzw. Nichtdeterminismus hat in diesem Modell eine andere Bedeutung: Eine Folge von Zügen ist nur dann eine Siegstrategie, wenn jeder zugehörige Pfad zum Endzustand führt! (Gegenbeispiel: ee ist keine Siegstrategie)

Aufgabe 4

Blatt 2

6

a.) Offensichtlich ist R_L symmetrisch und reflexiv.

Wir zeigen nun die Transitivität von R_L:

Gelte $u R_L v$ und $v R_L w$. Sei $x \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort.

Es gilt $ux \in L$

gdw (wg. $u R_L v$)

$vx \in L$

gdw (wg. $v R_L w$)

$wx \in L$

Also $ux \in L$ gdw $wx \in L$ und damit $u R_L w$

b.) Äquivalenzklassen von L_1:

	$x: ux \in L_1$	$x: ux \notin L_1$
$\varepsilon + \Sigma^* b$	$\Sigma^* baaa^* + aaaa^*$	$(\Sigma^* b)(a + aa) + \varepsilon + a + aa$
$a + \Sigma^* ba$	$\Sigma^* baaa^* + aaa^*$	$\Sigma^* b(a+aa) + \varepsilon + a$
$aa + \Sigma^* baa$	$\Sigma^* baaa^* + aa^*$	$\Sigma^* b(a+aa) + \varepsilon$
$aaaa^* + \Sigma^* baaaa^*$	$\Sigma^* baaa^* + a^*$	$\Sigma^* b(a+aa)$

Index von R_{L_1} ist 4

Äquivalenzklassen von L_2: $|w|_a$ Anzahl der a's in w

für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist

$C_i = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a - |w|_b = i \}$ $x: ux \in L_2$: $\{ x \in \Sigma^* \mid |w|_a - |w|_b = -i \}$

eine Äquivalenzklasse

Der Index von R_{L_2} ist ω

zu Aufgabe 4

c.) Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer Automat, $L = L(A)$ und $u, v \in \Sigma^*$ mit $(q_0, u, q) \in \delta^*$ und $(q_0, v, q) \in \delta^*$.

Sei $x \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort.

Es gilt: $ux \in L$

$\Downarrow$ Def $ux \in L(A)$

$\exists r \in F : (q_0, ux, r) \in \delta^*$

$\Downarrow$ A ist alphabetisch

$\exists p \in Q : \exists r \in F : (q_0, u, p) \in \delta^* \wedge (p, x, r) \in \delta^*$

Hier geht ein, daß A deterministisch ist. $\rightarrow$ $\Downarrow$ A ist deterministisch, Voraussetzung (q_0, u, q) $\Rightarrow p = q$

$\exists r \in F : (q_0, u, q) \in \delta^* \wedge (q, x, r) \in \delta^*$

$\Downarrow$ Voraussetzung

$\exists r \in F : (q_0, v, q) \in \delta^* \wedge (q, x, r) \in \delta^*$

$\Downarrow$ Def δ^*

$\exists r \in F : (q_0, vx, r) \in \delta^*$

$\Downarrow$ Def $vx \in L(A)$

$vx \in L$

Symmetrisch dazu beweist man $vx \in L \Rightarrow ux \in L$.

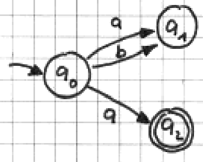
Insgesamt gilt also für alle x: $ux \in L$ gdw $vx \in L$, d. h. $u \, R_L \, v$.

zu Aufgabe 4

c.) (Fortsetzung)

Die Aussage gilt für nicht deterministische Automaten im allgemeinen nicht!

Gegenbeispiel:



$(q_0, a, q_1) \in \delta$

$(q_0, b, q_1) \in \delta$

aber $a \cancel{R_L} b$,

denn $a \in L$ und $b \notin L$

$a\varepsilon \in L$ $b\varepsilon \notin L$

d.) Es gibt keinen endlichen Automaten, der die Sprache L_2 akzeptiert.

Wegen Satz 2.5 reicht es zu zeigen, daß es keinen determinstischen und vollständigen endlichen Automaten gibt.

Angenommen es gäbe einen solchen Automaten. Dann wählen wir aus jeder Äquivalenzklasse C_i von R_{L_2} ein Wort $u_i \in C_i$ und definieren q_i mit $(q_0, u_i, q_i) \in \delta^*$. ex. wg. Annahme der Vollst.
Da für kein $i \neq j$ $u_i \, R_{L_2} \, u_j$ gilt müssen wg. c.) alle q_i verschieden sein. Da R_{L_2} wg. b. unendlich viele Äquivalenzklassen besitzt, hätte der Automat unendlich viele verschiedene Zustände $\lightning$