Aufgabe 1

a) Automat für L_1: $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, I_1, F_1)$

Automat für L_2: $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, I_2, F_2)$

Konstruktion des Automaten für $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$:

Idee: O.B.d.A können wir davon ausgehen, daß A_1 vollständig und deterministisch ist, d.h. $I_1 = \{q_0\}$ und für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ existiert genau ein $p \in Q_1$ mit $(q_0, w, p) \in \delta^*$.

$w \in L(A_1) = L_1$ gdw $p \in F_1$

Um einen Automaten zu erhalten, der $\overline{L_1}$ akzeptiert müssen wir nur die Endzustände austauschen

$w \in \overline{L_1}$ gdw $w \notin L_1$ gdw $p \notin F_1$

gdw $p \in Q_1 \setminus F_1$

Also: $A = (Q_1, \Sigma, \delta_1, \underset{\{q_0\}}{I_1}, Q_1 \setminus F_1)$ akzeptiert $\overline{L_1}$.

Beweis, daß $L_1 \cap L_2$ von einem endlichen Automaten akzeptiert wird:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

de Morgan

Mit den Konstruktionen für $\overline{}$ und $\cup$ können wir also Automaten für $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$, $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ und $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ konstruieren!

a.) (Fortsetzung)

Die Konstruktion von $L_1 \cup L_2$ via $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ ist nicht besonders praktikabel!

Selbst wenn L_1 und L_2 vollständig und det sind, ist $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ i. allg. nicht deterministisch!

Deshalb geben wir noch eine explizite Konstruktion an: Synchronisation von A_1 und A_2.

Idee: Beide Automaten führen ihre Übergänge synchron durch; das Wort wird erkannt, wenn beide Automaten in einem Endzustand gelangen.

Voraussetzung: die Automaten sind buchstabierend. dies ist o.B.d.A erfüllt

$$A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, I_1 \times I_2, F_1 \times F_2)$$

$$\delta = \{ ((q_1, q_2), a, (p_1, p_2)) \mid (q_1, a, p_1) \in \delta_1, (q_2, a, p_2) \in \delta_2 \}$$

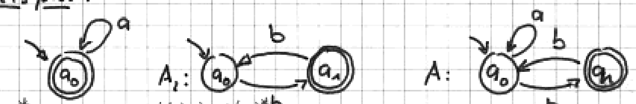
typischerweise wird diese Konstruktion für vollständige deterministische Automaten benutzt; sie funktioniert aber auch für buchstabierende Automaten.

→ (2a)

b.) Die Aussage ist selbst für $Q_1 \cap Q_2 = F_1 = I_2$ mit $|F_1| = 1$ falsch:

Gegenbeispiel:

abbab $\in L(A)$
abbab $\notin L(A_1)L(A_2)$



A_1: $L(A_1) = a^*$

A_2: $L(A_2) = b(bb)^*b$

A:

zu Aufgabe 1 a.,

Um einen Automaten für L_1^* zu erhalten, müssen wir jeden Endzustand von A_1 mit jedem Anfangszustand durch eine ε-Kante verbinden.

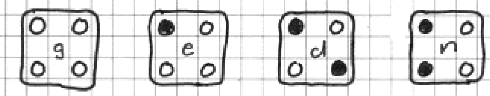
Offensichtlich erkennt der neue Automat dann die Sprache L_1^+. Damit auch das leere Wort akzeptiert ist führen wir einen neuen Zustand ein, der sowohl Anfangs- als auch Endzustand ist (aber keine Verbindungskanten besitzt).

$$A = (Q_1 \cup \{q_0\},\ \Sigma,\ \delta \cup F_1 \times \{\varepsilon\} \times I_1,\ I_1 \cup \{q_0\},\ F_1 \cup \{q_0\})$$

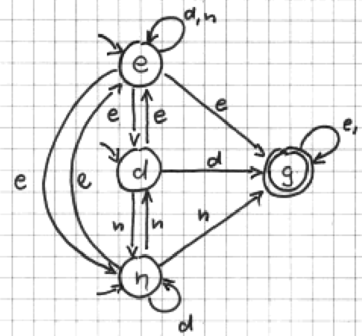
$$q_0 \notin Q_1$$

Bem.: Eleganter werden die Konstruktionen, wenn man davon ausgeht, daß L_1 und L_2 genau einen Start- und Endzustand besitzen, und bei der Konstruktion jeweils ein neuer Start- und Endzustand hinzugefügt wird.

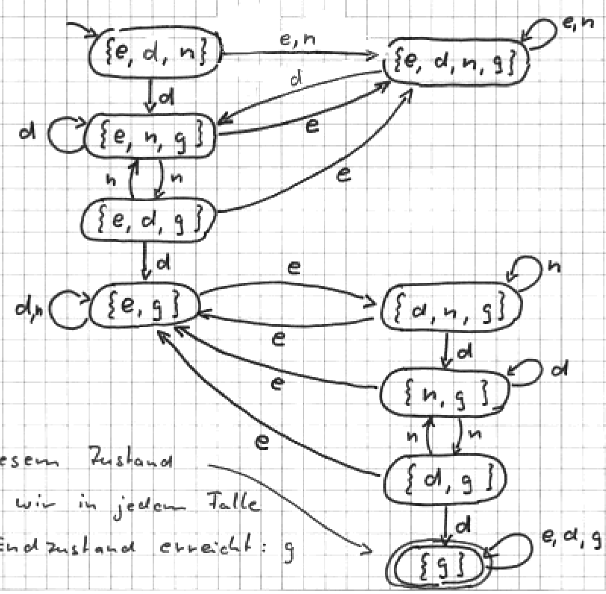
Aufgabe 2



Der Automat:



Wir konstruieren den "Potenzautomaten"



In diesem Zustand haben wir in jedem Falle den Endzustand erreicht: g

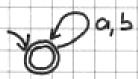
Der Unterschied unserer Konstruktion besteht darin, daß wir nicht alle Zustände, die einen Endzustand des ursprünglichen Automaten enthalten, zu einem Endzustand machen, sondern nur den Zustand, den aus dem einen Zustand $\{g\}$ bestehende. D.h. alle Pfade, die zu diesem Zustand führen, führen im ursprünglichen Automaten in jedem Falle zum Endzustand.

Alle Pfade vom Anfangszustand zum Endzustand unseres Potenzautomaten sind eine Siegstrategie!

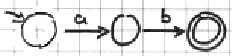
z.B.: d n d e d n d

Aufgabe 3

a.) Wir konstruieren die Automaten durch Zusammenschalten der folgenden Automaten



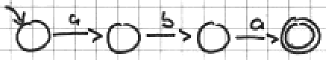
für $(a+b)^*$



für ab

ba analog

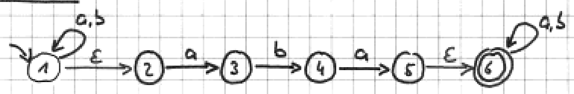
und



für aba

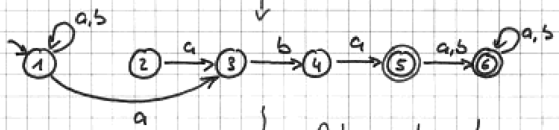
Danach machen wir die Automaten deterministisch (Potenzautomatenkonstruktion).

Zunächst: $(a+b)^*\ aba\ (a+b)^*$

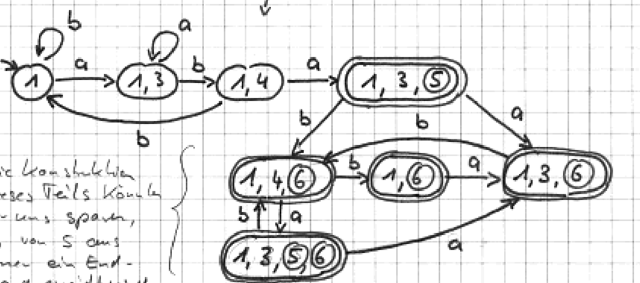


Zusammenschalten

ε-Elimination



Potenzautomat

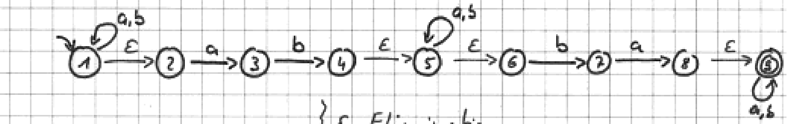


die Konstruktion dieses Teils könnten wir uns sparen, da von 5 aus immer ein Endzustand erreicht wird zu Aufg. 3 a.)

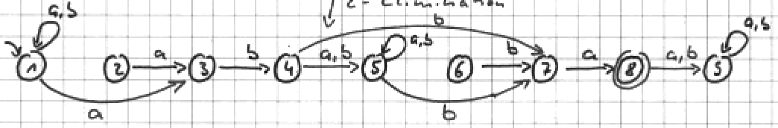
Blatt 3

6

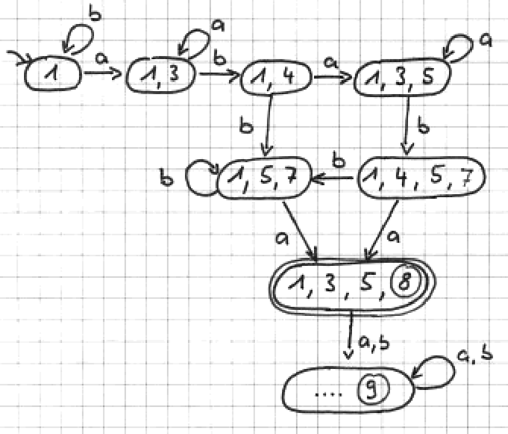
Jetzt: $(a+b)^* ab (a+b)^* ba (a+b)^*$



ε-Elimination



Potenzautomat



ab hier konstruieren wir nicht mehr weiter, da von 9 aus immer wieder 9 erreicht wird!

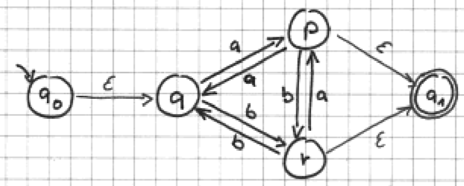
Hier würden noch 5 weitere Zustände entstehen

Aufgabe 3

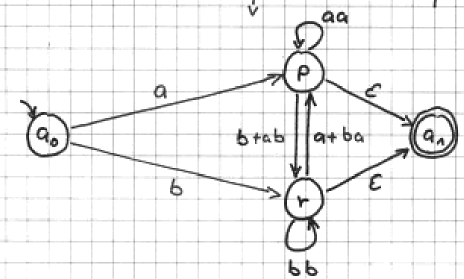
Blatt 3

7

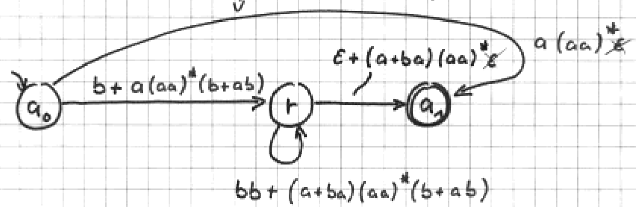
b.)



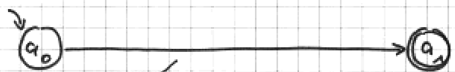
Elimination q



Elimination p



Elimination r



$$a(aa)^* + \underbrace{(b + a(aa)^*(b+ab))}_{\text{endet mit b ungerade}} (\underbrace{bb}_{\text{gerade b}} + \underbrace{(a+ba)(aa)^*(b+ab)}_{\text{ungerade b immer}})^* (\varepsilon + (a+ba)\underbrace{(aa)^*}_{\text{ungerade a}})$$

b ungerade

Blatt 3

(8)

zu Aufgabe 3 b

Der reguläre Ausdruck ist ziemlich "unlesbar"!

Der Automat beschreibt die Sprache der Worte, deren letzte zusammenhängende Sequenz von gleichen Zeichen ungerade Länge hat.

$w \in L(A)$ gdw $\max\{\,|v| \mid w = uv,\ v \in (a^* + b^*)\}$ ist ungerade

$a(aa)^* +$
$b(bb)^* +$
$(a+b)^* b\, a(aa)^* +$
$(a+b)^* a\, b(bb)^*$

Wer Spaß daran hat kann versuchen, die Übereinstimmung durch Nachrechnen zu beweisen!

Blatt 3

(9)

Aufgabe 4

a) Idee:

$$
\begin{aligned}
a^* &= aa^* + \varepsilon \\
&= a(aa^* + \varepsilon) + \varepsilon && (3)\\
&= aaa^* + a + \varepsilon && (9)\\
&= aaa^* + a + \varepsilon + a && (13)\ (23)\\
&= a(aa^* + \varepsilon) + \varepsilon + a && (30)\\
&= a\,a^* + \varepsilon + a && (32)\\
&= a^* + a && (34)
\end{aligned}
$$

Beweis mit Hilfe der Axiome und Regeln:

(1)	$a^* = aa^* + \varepsilon$	Ax. 8
(2)	$a\underline{a^*} + \varepsilon = a(\underline{aa^* + \varepsilon}) + \varepsilon$	Kongruenz mit (1)
(3)	$a^* = a(aa^* + \varepsilon) + \varepsilon$	Transitivität (1)(2)
(4)	$a(aa^* + \varepsilon) = a(aa^*) + a\varepsilon$	Ax. 4
(5)	$a\varepsilon = a$	Ax. 6
(6)	$a(aa^*) + \underline{a\varepsilon} = a(aa^*) + \underline{a}$	Kongruenz mit (5)
(7)	$a(aa^* + \varepsilon) = a(aa^*) + a$	Transitivität (4)(6)
(8)	$\underline{a(aa^* + \varepsilon)} + \varepsilon = (\underline{a(aa^*) + a}) + \varepsilon$	Kongruenz mit (7)
(9)	$a^* = (a(aa^*) + a) + \varepsilon$	Transitivität (3)(8)
(10)	$a + a = a$	Ax. 0'''
(11)	$a = a + a$	Symmetrie (10)
(12)	$(a(aa^*) + \underline{a}) + \varepsilon = (a(aa^*) + (\underline{a+a})) + \varepsilon$	Kongruenz (11)
(13)	$a^* = (a(aa^*) + (a+a)) + \varepsilon$	Transitivität (9)(12)
(14)	$(a(aa^*) + (a+a)) + \varepsilon = a(aa^*) + ((a+a) + \varepsilon)$	Ax. 1
(15)	$(a+a) + \varepsilon = a + (a + \varepsilon)$	Ax. 1
(16)	$a + (a + \varepsilon) = (a + \varepsilon) + a$	Ax. 3
(17)	$(a+a) + \varepsilon = (a + \varepsilon) + a$	Transitivität (15)(16)

Aufgabe 4 a (Fortsetzung)

(18)	$a(aa^*) + (\underline{(a+a)+\varepsilon}) =$ $a(aa^*) + (\underline{(a+\varepsilon)+a})$	Kongruenz (17)
(19)	$(a(aa^*) + (a+\varepsilon)) + a =$ $a(aa^*) + ((a+\varepsilon)+a)$	Ax. 5
(20)	$a(aa^*) + ((a+\varepsilon)+a) =$ $(a(aa^*) + (a+\varepsilon)) + a$	Symmetrie (19)
(21)	$a^* = a(aa^*) + ((a+a)+\varepsilon)$	Transitivität (13)(14)
(22)	$a^* = a(aa^*) + ((a+\varepsilon)+a)$	Transitivität (21)(18)
(23)	$a^* = (a(aa^*) + (a+\varepsilon)) + a$	Transitivität (22)(20)
(24)	$(a(aa^*)+a)+\varepsilon = a(aa^*) + (a+\varepsilon)$	Ax. 1
(25)	$a(aa^*) + (a+\varepsilon) = (a(aa^*)+a)+\varepsilon$	Symmetrie (24)
(26)	$a(aa^*) + a = a(aa^* + \varepsilon)$	Symmetrie (7)
(27)	$(\underline{a(aa^*)+a})+\varepsilon = \underline{a(aa^*+\varepsilon)} + \varepsilon$	Kongruenz (26)
(28)	$aa^* + \varepsilon = a^*$	Symmetrie (1)
(29)	$a(\underline{aa^*+\varepsilon})+\varepsilon = a\underline{a}^* + \varepsilon$	Kongruenz (28)
(30)	$a(aa^*) + (a+\varepsilon) = a(aa^*+\varepsilon) + \varepsilon$	Transitivität (25)(27)
(31)	$a(aa^*) + (a+\varepsilon) = aa^* + \varepsilon$	Transitivität (30)(29)
(32)	$a(aa^*) + (a+\varepsilon) = a^*$	Transitivität (31)(28)
(33)	$(\underline{a(aa^*) + (a+\varepsilon)}) + a = \underline{a^*} + a$	Kongruenz (32)
(34)	$a^* = a^* + a$	Transitivität (23)(33)

Aufgabe 4

b.)
- Sei $X = S^*T$. Einsetzen in die Gleichung ergibt: $S^*T = S(S^*T) \cup T = S^* \cup T$ ✓

  X ist also eine Lösung.

- Sei X eine Lösung von $X = SX \cup T$. Wir beweisen durch Induktion über $i \in \mathbb{N}$, daß jedes Wort $w \in S^iT$ in X liegt:

  $i = 0$: $w \in S^0T = T$ liegt in X, da wegen $X = SX \cup T$ gilt $X \supseteq T$.

  $i \to i+1$: $w \in S^{i+1}T \Rightarrow$ ex $u \in S$ und $v \in S^iT$ mit $w = uv$. Wegen I.V. gilt $v \in X$. Wegen $X = SX \cup T$ und $u \in S$ und $v \in X$ gilt dann auch $w \in X$.

  Insgesamt liegt jedes $w \in S^*T$ auch in X.

- Gelte nun $\varepsilon \notin S$ und sei X eine Lösung der Gleichung $X = SX \cup T$. Wir zeigen durch Induktion über die Wortlänge, daß jedes $w \in X$ auch in S^*T liegt

Blatt 3

12

$i = 0$: $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$

Wenn $w \in X$, d.h. $w \in SX \cup T$,

muß wg. $\varepsilon \notin S$ gelten $w \in T$.

D.h. $w \in S^*T$

$i > 0$: Für $w \in X$ mit $|w| = i$ unterscheiden wir zwei Fälle (gemäß $X = SX \cup T$)

1.) $w \in SX$: Wegen $\varepsilon \notin S$ gibt es dann ein $u \in S$ mit $|u| > 0$ und $v \in X$ mit $|v| < i$ und $w = uv$. Gemäß I.V. gilt $v \in S^*T$.

Damit gilt $w \in SS^*T \subseteq S^*T$

2.) $w \in T$: Dann gilt offensichtlich $w \in S^*T$.

Für $\varepsilon \in S$ hat die Gleichung im allg. viele Lösungen: z.B. ist $X = \Sigma^*$ eine Lösung

$$\Sigma^* = S\Sigma^* \cup T$$

Bem.: Für jede Obermenge $S_0 \supseteq S$ und $T_0 \supseteq T$ ist $X = S_0^*T_0$ eine Lösung der Gleichung

$$S_0^*T_0 = S S_0^* T_0 \cup T$$

$\subseteq$ ✓ wg. $\varepsilon \in S$

$\supseteq$ ✓ wg. $S \subseteq S_0$

Nur für $\varepsilon \notin S$ ist also die Lösung von $X = SX \cup T$ eindeutig definiert: $X = S^*T$.