Aufgabe 1 Blatt 6 (1)

a) c b c b a

$q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1 \to q_2 \to q_2$

c b c c a

$q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1 \leftarrow q_1 \leftarrow q_1 \leftarrow q_1 \to q_2 \to q_2 \to q_2 \to q_2$

c c a b

$q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1 \to q_1 \to q_1$

b) Wir konstruieren die Übergänge systematisch gemäß der induktiven Vorschrift aus der Vorlesung:

ungerade Kreuzungsfolgen	gerade Kreuzungsfolgen
	i) $\varepsilon \xrightarrow{a} \varepsilon$ (1), $\varepsilon \xrightarrow{b} \varepsilon$ (2), $\varepsilon \xrightarrow{c} \varepsilon$ (3)
ii) $q_0 \xrightarrow{b} q_0$ (4), $q_0 \xrightarrow{c} q_0$ (5), $q_1 \xrightarrow{b} q_2$, $q_2 \xrightarrow{a} q_2$ (6), $q_2 \xrightarrow{b} q_2$, $q_2 \xrightarrow{c} q_2$ (7)	v) $\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_0\\q_0\end{smallmatrix}$, $\varepsilon \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_0\\q_0\end{smallmatrix}$, $\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix}$ (8), $\varepsilon \xrightarrow{a} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\end{smallmatrix}$, $\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\end{smallmatrix}$, $\varepsilon \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\end{smallmatrix}$

Aufgabe 1 b. (Forts.) Blatt 6 (2)

iv) $\begin{smallmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{a} q_2$ (9) mit (6)

$\begin{smallmatrix}q_1\\q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{a} q_2$

$\begin{smallmatrix}q_1\\q_1\\q_0\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} q_0$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_1\\q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} q_2$

iii) $\begin{smallmatrix}q_0\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{a} \begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix}q_1\\q_0\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_1\\q_0\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix}$ (10) mit (3)

ii) $q_0 \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix}$ (11) mit (8) $\quad$ $q_0 \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix}$

$q_0 \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_0\\q_2\\q_2\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix}$ (12) mit (10)

$q_1 \cancel{\xrightarrow{b}} q_2$

$q_2 \cancel{\xrightarrow{a}} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\\q_2\end{smallmatrix}$ $\quad$ $q_1 \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$

$q_2 \cancel{\xrightarrow{b}} q_2$

$q_2 \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_2\\q_1\\q_0\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_2\\q_1\\q_0\end{smallmatrix}$

v) $\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_0\\q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_0\\q_0\\q_2\\q_2\end{smallmatrix}$

$\varepsilon \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_0\\q_0\\q_2\\q_2\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_0\\q_0\\q_1\\q_2\end{smallmatrix}$

$\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_1\\q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$

$\varepsilon \xrightarrow{b} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$

$\varepsilon \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_1\\q_0\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_2\\q_2\\q_1\\q_0\end{smallmatrix}$

iv) $\begin{smallmatrix}q_1\\q_1\\q_0\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_0\\q_2\\q_2\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_1\\q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$

iii) $q_1 \cancel{\xrightarrow{a}} q_0$ $\quad$ $q_1 \cancel{\xrightarrow{a}} q_1$

$\begin{smallmatrix}q_1\\q_0\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_1\\q_0\\q_2\\q_2\end{smallmatrix}$ $\quad$ $\begin{smallmatrix}q_1\\q_1\\q_2\end{smallmatrix} \xrightarrow{c} \begin{smallmatrix}q_1\\q_2\\q_0\\q_0\end{smallmatrix}$

ii) $q_0 \cancel{\xrightarrow{b}} q_0$ $\quad$ $q_0 \cancel{\xrightarrow{c}} q_0$ $\quad$ $q_1 \cancel{\xrightarrow{b}} q_2$ $\quad$ $q_2 \cancel{\xrightarrow{a}} q_2$ $\quad$ $q_2 \cancel{\xrightarrow{b}} q_2$ $\quad$ $q_2 \cancel{\xrightarrow{c}} q_2$

v)

iv)

iii) $q_1 \cancel{\xrightarrow{a}} q_0$ $\quad$ $q_1 \cancel{\xrightarrow{a}} q_1$ $\quad$ $q_1 \cancel{\xrightarrow{c}} q_1$

Aufgabe 1 (Forts.)

Blatt 6 ③

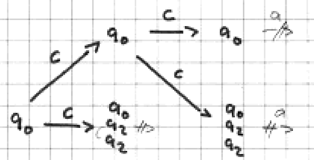
c.) $w = cbcba$:

$$q_0 \xrightarrow{c} q_0 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{c} q_0 \xrightarrow{b} \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{matrix} \xrightarrow{a} q_2$$

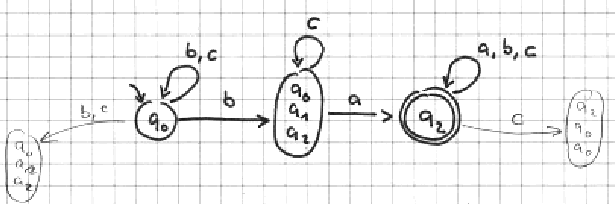
$w = cbcca$:

$$q_0 \xrightarrow{c} q_0 \xrightarrow{b} \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{matrix} \xrightarrow{c} \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{matrix} \xrightarrow{c} \begin{matrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{matrix} \xrightarrow{a} q_2$$

Mögliche Herleitungen für $w = ccab$



NB: Der erreichbare Teil des konstruierten Automaten aus Aufgabe 1b sieht wie folgt aus:



Die akzeptierte Sprache ist (wie erwartet):

$$(b+c)^* \, b \, c^* \, a \, (a+b+c)^*$$

Aufgabe 2

Blatt 6 ④

a.) Syntaktisches "Ausmultiplizieren" ergibt:

$$X_1 = (b+c)\,X_1 + b\,X_2 + \emptyset\,X_3 + \emptyset$$
$$X_2 = \emptyset\,X_1 + c\,X_2 + a\,X_3 + \emptyset$$
$$X_3 = \emptyset\,X_1 + \emptyset\,X_2 + (a+b+c)\,X_3 + \varepsilon$$

Vereinfachung ergibt $\quad \emptyset X = \emptyset \quad w + \emptyset = w$

$$X_1 = (b+c)\,X_1 + b\,X_2$$
$$X_2 = c\,X_2 + a\,X_3$$
$$X_3 = (a+b+c)\,X_3 + \varepsilon$$

b.) Dieses Gleichungssystem können wir unmittelbar in eine rechtslineare Grammatik übersetzen

$X_1 \to b\,X_1 \qquad X_1 \to c\,X_1$
$X_1 \to b\,X_2$

$X_2 \to c\,X_2 \qquad X_2 \to a\,X_3$

$X_3 \to a\,X_3 \qquad X_3 \to b\,X_3$
$X_3 \to c\,X_3$
$X_3 \to \varepsilon$

wobei: X_1, X_2, X_3 Variablen bzw. Nonterminale sind
Wenn wir X_i als Startsymbol wählen, ist $L(G_i)$ eine Lösung des Gleichungssystems für Variable X_i.

Aufgabe 2 (Forts.)

erfüllt LWE nicht (d.h. $\varepsilon \notin a+b+c$)

c) $X_3 = (a+b+c)\,X_3 + \varepsilon$

Mit der Gleichungsauflösungsregel erhalten wir:

$$X_3 = (a+b+c)^*\varepsilon = (a+b+c)^*$$

Einsetzen von X_3 in die Gleichung für X_2 ergibt:

$X_2 = c\,X_2 + a(a+b+c)^*$

Mit der Gleichungsauflösungsregel erhalten wir:

$$X_2 = c^* a(a+b+c)^*$$

Einsetzen von X_2 (und X_3) in die Gleichung für X_1 ergibt:

$X_1 = (b+c)\,X_1 + bc^*a(a+b+c)^*$

Mit der Gleichungsauflösungsregel erhalten wir:

$$X_1 = (b+c)^* bc^*a(a+b+c)^*$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b+c)^* bc^*a(a+b+c)^* \\ c^*a(a+b+c)^* \\ (a+b+c)^* \end{bmatrix}$$

ist also die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

Aufgabe (Forts.)

d) $X_n = w_{n1}X_1 + \dots + w_{nn}X_n + u_n$

$= w_{nn}X_n + w_{n1}X_1 + \dots + w_{n\,n-1}X_{n-1} + u_n$

Mit der Gleichungsauflösungsregel erhalten wir:

w_{nn} erfüllt gemäß Voraussetzung die LWE nicht!

$$X_n = w_{nn}^*(w_{n1}X_1 + \dots + w_{n\,n-1}X_{n-1} + u_n)$$

$$= w_{nn}^*w_{n1}X_1 + \dots + w_{nn}^*w_{n\,n-1}X_{n-1} + w_{nn}^*u_n$$

Einsetzen in die Gleichung

$X_i = w_{i1}X_1 + \dots + w_{in}X_n + u_i$

ergibt:

$$X_i = w_{i1}X_1 + \dots + w_{i\,n-1}X_{n-1} + u_i$$

$$w_{in}(w_{nn}^*w_{n1}X_1 + \dots + w_{nn}^*w_{n\,n-1}X_{n-1} + w_{nn}^*u_n)$$

$$= (w_{i1} + w_{in}w_{nn}^*w_{n1})X_1 + \dots + (w_{i\,n-1} + w_{in}w_{nn}^*w_{n\,n-1})X_{n-1}$$

$$+ u_i + w_{in}w_{nn}^*u_n$$

Wir können also das Lösen eines linearen Gleichungssystems der Dimension $n \geq 2$ auf das Lösen eines Gleichungssystems der Dimension $n-1$ zurückführen:

Aufgabe 2 d (Forts.) Blatt 6

(7)

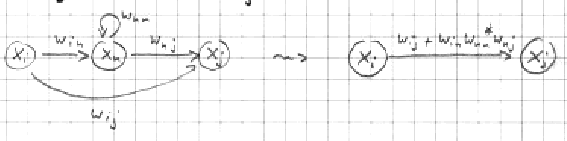
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} + w_{1n} w_{nn}^* w_{n1} & \dots & w_{1\,n-1} + w_{1n} w_{nn}^* w_{n\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1\,1} + w_{n-1\,n} w_{nn}^* w_{n1} & \dots & w_{n-1\,n-1} + w_{n-1\,n} w_{nn}^* w_{n\,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} u_1 + w_{1n} w_{nn}^* u_n \\ \vdots \\ u_{n-1} + w_{n-1\,n} w_{nn}^* u_n \end{bmatrix}$$

Da wir ein Gleichungssystem der Dimension 1 durch Gleichungsauflösung lösen können, haben wir nun ein Verfahren zur Lösung beliebiger Gleichungssysteme (für die die w_{ij} die LWE nicht erfüllen).

Tatsächlich ist dieses Verfahren im wesentlichen das Verfahren, das wir zur Konstruktion eines zu einem endlichen Automaten gehörigen regulären Ausdrucks betrachtet haben:

$$w_{ij} + w_{in} w_{nn}^* w_{nj}$$



e) Im allgemeinen ist die Lösung eines Gleichungssystems mit w_{ij}, die die LWE erfüllen nicht eindeutig!

Einfachstes Gegenbeispiel: $[X_1] = [\varepsilon][X_1] + [\emptyset]$

Aufgabe 2 (Forts.) Blatt 6

(8)

f)

$$\begin{bmatrix} q \\ p \\ r \end{bmatrix} = \begin{array}{c} q \\ p \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q & p & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \emptyset & a & b \\ a & \emptyset & b \\ b & a & \emptyset \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} q \\ p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

← q ist kein Endzustand

} p und r sind Endzustände

- Zustände des Automaten werden die Variablen des Gleichungssystems.
- Die Matrix beschreibt die Übergänge
- Der Vektor $\underline{u}$ die Endzustände
  - ε - Eintrag für q gdw q Endzustand
  - $\emptyset$ - Eintrag, wenn q kein Endzustand

g) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein buchstabierender Automat mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Aufaddieren aller Übergänge von q_i nach q_j

Wir definieren $w_{ij} = \sum_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a, q_j)}} a$

(Wenn kein $a \in A$ mit $\delta(q_i, a, q_j)$ ex. gilt $w_{ij} = \emptyset$)

und $u_i = \begin{cases} \emptyset & q_i \notin F \\ \varepsilon & q_i \in F \end{cases}$

Dann besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

eine eindeutige Lösung und für die Lösung $\begin{bmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ gilt $L_0 = L(A)$.