Aufgabe 1

Blatt 9

1

a) Sei $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ein Kellerautomat.

Seien $q_a, q_e \notin Q$ und $X_0 \notin \Gamma$.

Wir definieren

$$A' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_a, X_0, \{q_e\})$$

mit $Q' = Q \cup \{q_a, q_e\}$

$\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$

$\delta' = \delta \cup$ Simulation von A

$q_a X_0 \vdash q_0 Z_0 X_0$ $\quad \{((q_a, \varepsilon, X_0), (q_0, Z_0 X_0))\} \cup$

$w q X_0 \vdash w q_e$ $\quad \{((q, \varepsilon, X_0), (q_e, \varepsilon)) \mid q \in Q\}$

b) Wir zeigen $L(A') \subseteq N(A)$ und $L(A') \supseteq N(A)$ separat:

"$L(A') \supseteq N(A)$": Sei $w \in N(A)$, wir müssen zeigen $w \in L(A')$.

Gemäß Def. 3.19 (2) gilt $w \in N(A)$ genau dann, wenn $q_0 Z_0 \vdash^* wq$ gilt, d.h. es gibt Konfigurationen $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ von A mit

$$q_0 Z_0 = \gamma_0 \vdash_A \gamma_1 \vdash_A \dots \vdash_A \gamma_n = wq$$

Wegen $\delta' \supseteq \delta$ gilt dann auch

$$q_0 Z_0 = \gamma_0 \vdash_{A'} \gamma_1 \vdash_{A'} \dots \vdash_{A'} \gamma_n = wq$$

Aufgabe 1 b (Forts.)

Blatt 9

2

Wegen der Def. 3.18 (Folgekonfig.) gilt mit $\gamma \vdash_{A'} \gamma'$ für jedes $X \in \Gamma$ auch

$$\gamma X \vdash_{A'} \gamma' X,$$

also auch

$$q_0 Z_0 X_0 \vdash_{A'} \gamma_1 X_0 \vdash_{A'} \gamma_2 X_0 \vdash_{A'} \dots \vdash_{A'} wq X_0$$

Mit $q_a X_0 \vdash_{A'} q_0 Z_0 X_0$ und $wq X_0 \vdash_{A'} w q_e$

gilt dann insgesamt $q_a X_0 \vdash_{A'} w q_e$.

Gemäß Def. 3.19 (1) gilt also $w \in L(A')$.

"$L(A') \subseteq N(A)$" Sei $w \in L(A')$. Wir zeigen $w \in N(A)$.

Gemäß Def. 3.19 (1) gilt $w \in L(A')$ genau dann, wenn $q_a X_0 \vdash_{A'}^* w q_e \alpha$.

D.h. es ex. Konfigurationen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ mit $q_a X_0 = \gamma_0 \vdash_{A'} \gamma_1 \vdash_{A'} \dots \vdash_A \gamma_n = w q_e \alpha$

<u>Beobachtungen:</u> (müßte man durch Induktion beweisen)

- In keiner Konfiguration $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ kommt der Zustand q_a vor
- In keiner Konfiguration $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ kommt der Zustand q_e vor
- $\gamma_1 = q_0 Z_0 X_0$

Aufgabe 1 b (Forts.)

- Jede Konfiguration $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ hat die Form $\gamma_i \in \Sigma^* Q \Gamma^* X_0$
- $\gamma_n = w q_e$ und $\gamma_{n-1} = w q X_0$
- Für $i = 1, \dots, n-2$ gilt: $\gamma_i \vdash_A \gamma_{i+1}$

  Insbes. gilt $\gamma_1 = q_0 Z_0 X_0 \vdash_A \gamma_2 \vdash_A \dots \vdash_A \gamma_{n-1} = w q X_0$

Da $X_0 \notin \Gamma$ gilt dann auch

$$q_0 Z_0 \vdash^* w q$$

und damit $w \in N(A)$

c.) Idee: Bisher haben wir das Kellerende durch ein zusätzliches Kellersymbol X_0 markiert.
Jetzt markieren wir das unterste Kellersymbol mit einem Strich Z_0'

$$A'' = (Q'', \Sigma, \Gamma \cup \Gamma', \delta'', q_0, Z_0', \{q_e\})$$

$Q'' = Q \cup \{q_e\}$ wobei $q_e \notin Q$

$\Gamma' = \{ Z' \mid Z \in \Gamma \}$ ← Zeichen, die das unterste Kellerelement kennzeichnen

$\delta'' = \delta \cup$ ①

② $\{ ((q, a, X'), (q', \alpha Z')) \mid ((q, a, X), (q', \alpha Z)) \in \delta \} \cup$

$q, q' \in Q$ $\quad Z \in \Gamma$ $\quad \alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ $\quad X \in \Gamma$

③ $\{ ((q, a, X'), (q_e, \varepsilon)) \mid ((q, a, X)(q', \varepsilon)) \}$

Aufgabe 1 c (Forts.)

Beobachtungen

- A'' besitzt genau einen Zustand mehr als A (q_e).
- Wenn A keinen ε-Übergang besitzt, dann besitzt auch A'' keinen ε-Übergang
- A'' simuliert das Verhalten von A; ①/②/③
  beim Entfernen des letzten Kellersymbols X' ③ geht der Kellerautomat A'' in den akzeptierenden Zustand q_e über.

⇒ A'' akzeptiert über Endzustände genau die Wörter, die A über leeren Keller akzeptiert,

d.h. $L(A'') = N(A)$.

d.) Sei L eine ε-freie kontextfreie Sprache. Dann gibt es einen Kellerautomaten A, der die Sprache L über leeren Keller akzeptiert und der nur einen Zustand besitzt und keine ε-Übergänge besitzt (vgl. Beweis von Satz 3.22).

Wähle für diesen Automaten A den Automaten A'' (wie in Aufgabe c.). Dieser Automat besitzt keine ε-Übergänge und hat genau zwei Zustände und es gilt: $L(A'') = N(A) = L$.

Blatt 9

(5)

Aufgabe 1 d (Forts.)

Bemerkung: Tatsächlich gilt die Aussage nicht nur für ε-freie kontextfreie Sprachen, sondern für alle kontexfreie Sprachen. Der Beweis erfordert aber für Sprachen L mit $\varepsilon \in L$ eine Sonderkonstruktion.

Blatt 9

(6)

Aufgabe 2

a.) $L = \{ a^n b^n c^i \mid n, i \in \mathbb{N},\ n \neq i \}$

Wir beweisen durch Widerspruch, daß L nicht kontextfrei ist: Angenommen L wäre kontextfrei und n wäre das n des Ogden-lemmas für L, dann gibt es für

markierte Buchstaben

$$z = \underline{a^n}\, b^n c^{n+n!} \in L$$

eine Zerlegung $z = uvwxy$, so daß $uv^iwx^iy \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, und vx mind. ein a enthält.

Sei $z = uvwxy$ eine solche Zerlegung.

Dann gilt

- wegen $uwy \in L$, daß vx genauso viele a's wie b's enthält
- wegen $uv^2wx^2y \in L$, daß v nur a's enthält und x nur b's enthält

Also
$$\begin{array}{lll}
u = a^k & & k < n \\
v = a^j & & 1 \leq j \leq n \\
w = a^l b^m & & l = n-j-k \\
x = b^j & & \\
y = b^o c^{n+n!} & & o = n-j-m
\end{array}$$

Dann muß für $i = \frac{n!}{j}+1$ gelten $uv^iwx^iy \in L$

Aufgabe 2 a (Forts.)

$$uv^iwx^iy = a^k a^{j\cdot(\frac{n!}{j}+1)} a^l b^m b^{j\cdot(\frac{n!}{j}+1)} b^o c^{n+n!}$$

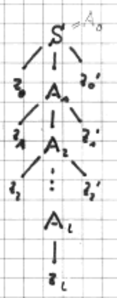
$$= a^{k+j+l} a^{n!} b^{m+j+o} b^{n!} c^{n+n!}$$

$$= a^{n+n!} b^{n+n!} c^{n+n!} \notin L \quad ↯$$

b) Sei L eine lineare Sprache.
O.B.d.A. gibt es eine lineare Grammatik G ohne Kettenproduktionen mit $L(G) = L$.

Sei $m = \max\{|\alpha| \mid A \to \alpha \in P\}$ die Länge der längsten rechten Seite einer Produktion von G und $n = m \cdot |V| + 1$.

Wir betrachten nun den Ableitungsbaum eines Wortes $z \in L$ mit $|z| \geq n$:



$z = z_0 z_1 \dots z_{l-1} z_l z'_{l-1} \dots z'_1 z'_0$

Wegen $|z| \geq n$ gibt es $j, k \in \{0, \dots, l\}$ mit $A_j = A_k$, denn sonst gälte $|z| = \sum_{i=0}^{l-1}(|z_i| + |z'_i|) + |z_l|$

$$\leq |V| \cdot m < n$$

Wir wählen j und k so, daß $A_j = A_k$ das erste doppelte Auftreten einer Variablen im Ableitungsbaum ist.

Aufgabe 2 b (Forts.)

Dann gilt mit
$u = z_0 \dots z_{j-1}$
$v = z_j \dots z_{k-1}$
$w = z_k \dots z_{l-1} z_l z'_{l-1} \dots z'_k$
$x = z'_{k-1} \dots z'_j$
$y = z'_{j-1} \dots z'_0$

$|uv| \leq n$ $\qquad |uv| \leq |V| \cdot m < n$ (*)
$|xy| \leq n$ $\qquad |xy| \leq |V| \cdot m < n$ (*)
und $|vx| > 1$ $\qquad G$ enthält keine Kettenproduktionen
und $uv^iwx^iy \in L$. $\qquad$ Wiederholen des Teilbaumes von A_j bis A_k ergibt die entsprechenden Ableitungsbäume.

(*) wir wissen sogar $|uvxy| \leq n$!

c) Wir beweisen, daß die Sprache L der korrekten Klammerausdrücke nicht linear ist, durch Widerspruch zum Pumping-Lemma aus Aufgabe 2b:

Wir wählen $z = \overbrace{(((\dots}^{n}\overbrace{()\dots)))}^{n}\overbrace{(((\dots(}^{n}\overbrace{)\dots)))}^{n} \in L$
u v | w | x y

Sei $uvwxy$ eine Zerlegung von z wie in b.
v kann nur öffnende Klammern enthalten $\quad |uv| \leq n$
x kann nur schließende Klammern enthalten $\quad |xy| \leq n$
Wegen $|vx| \geq 1$ enthält v oder x eine Klammer; wegen uv^2wx^2y enthält v genau so viele öffnende Klammern, wie x schließende Klammern.

Aufgabe 2 c (Forts.)

Insbes. gilt $|v| \geq 1$ und $|x| \geq 1$

Dann gilt aber $u w x \notin L$ ↯

$$\underbrace{(((\ldots(}_{<n}\;\underbrace{)\ldots)}_{=n}\;\underbrace{(((\ldots(}_{=n}\;\underbrace{)\ldots)))}_{<n}$$

v gelöscht   x gelöscht

Aufgabe 3

a) Es gilt $\varepsilon \in L_1/L_2$ genau dann,

wenn $v \in L_2$ und $\varepsilon v \in L_1$ existiert,

d.h. wenn $v \in L_2 \cap L_1$ existiert.

Wir beweisen nun durch Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ (für kontextfreie Sprachen L_1 und L_2), daß die kontextfreien Sprachen nicht effektiv unter Quotientenbildung abgeschlossen sind:

Angenommen L_1/L_2 wäre effektiv kontextfrei, dann könnten wir aus kf-Grammatiken für L_1 und L_2 eine kf-Grammatik für L_1/L_2 generieren. Für diese Grammatik ist entscheidbar, ob $\varepsilon \in L_1/L_2$ gilt (Satz 3.30).

- CYK
- $S \in V_{null}$

Gemäß unserer Vorüberlegung gilt genau dann auch $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

Damit wäre $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ entscheidbar ↯

b) Wir nehmen an, daß die kontextfreie Sprache L durch einen Kellerautomaten

$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

über Endzustände akzeptiert wird (d.h. $L = L(A)$)

Aufgabe 3 b (Forts.)

Die reguläre Sprache R werde von einem buchstabierenden Automaten

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

mit einem Anfangszustand q_0' akzeptiert.

Wir konstruieren nun einen Kellerautomaten A'', der $L \cap R$ akzeptiert. Dabei lassen wir im wesentlichen A und A' parallel laufen; lediglich die ε-Übergänge von A werden nur von A und nicht von A' durchgeführt:

$$A'' = (Q \times Q', \Sigma, \Gamma, \delta'', (q_0, q_0'), Z_0, F \times F')$$

wobei $\delta'' = \{ (((q,q'), a, X), ((p,p'), \alpha)) \mid$

$a \in \Sigma,$ — echter Übergang parallel A und A'

$((q, a, X), (p, \alpha)) \in \delta$ — A

$(q', p') \in \delta'$ — A' $\} \cup$

$\{ (((q,q'), \underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon\text{-Übergang}}, X), ((p, q'), \alpha)) \mid$ — A' bleibt stehen

$((q, \ , X), (p, \alpha)) \in \delta \}$

ε-Schritt in A

Durch Induktion kann man zeigen:

$$(q_0, q_0') Z_0 \vdash_{A''} w (p, p') \alpha \quad \text{gdw} \quad q_0 Z_0 \vdash_A w p \alpha \text{ und } p' \in \delta'(q_0', w)$$

Also gilt: $L(A'') = L \cap R$

Aufgabe 3 (Forts.)

c) Da kontextfreie Sprachen unter Homomorphismen, inversen Homomorphismen und Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind, können wir für L / R dieselbe Konstruktion durchführen wie für reguläre Sprachen (vgl. Blatt 5, Aufg 1c)

Nochmal: $\Sigma' = \{ a' \mid a \in \Sigma \}$

$f : \Sigma \to \Sigma', \quad f(a) = a'$

$h : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma, \quad h(a) = a \quad a \in \Sigma$
$\qquad h(a') = a \quad a' \in \Sigma'$

$$L' = \underbrace{\underbrace{h^{-1}(L)}_{\text{kontextfrei}} \cap \underbrace{\Sigma^* \circ f(R)}_{\text{regulär}}}_{\text{kontextfrei}}$$

$g : \Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma \quad g(a) = a \quad a \in \Sigma$
$\qquad g(a') = \varepsilon \quad a' \in \Sigma'$

$$L'' = \underbrace{g(L')}_{\text{kontextfrei}} = L / R$$